

О ПРИЛИВНОЙ СИЛЕ ВНУТРИ КОЛЬЦА ГАУССА

Б.П. Кондратьев

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга

Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН, Санкт-Петербург

Рассмотрена задача о приливном гравитационном влиянии на центральную планету от возмущающего тела (спутника), движущегося по эллиптической орбите. Выяснено, что в выражении приливного потенциала при трёх группах координат пробной точки стоят коэффициенты, зависящие только от координат спутника. При усреднении потенциала по полному периоду движения возмущающего тела остается только один коэффициент, а два обращаются в нуль. Тангенциальная составляющая приливной силы при усреднении исчезает, так что приливная сила во всех плоскостях, параллельных орбите спутника оказывается чисто радиальной, как если бы орбита спутника была просто круговой. Этот результат проверен прямым разложением пространственного потенциала эллиптического кольца Гаусса с любым эксцентриситетом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вначале напомним некоторые сведения из теории потенциала. Дано гравитирующее круговое кольцо радиусом R и массой $m = 2\pi R\mu_0$, где μ_0 – одномерная плотность. Потенциал кольца на оси симметрии Ox_3 равен

$$\varphi(z) = \frac{Gm}{\sqrt{R^2 + x_3^2}}. \quad (1)$$

В приливном приближении (приливный потенциал) формула (1) дает

$$\varphi(x_3) \approx \frac{Gm}{R} \left(1 - \frac{x_3^2}{2R^2} \right). \quad (2)$$

Аналогично, из полного пространственного потенциала круглого кольца (Кондратьев 2007)

$$\varphi(x_i) = \frac{4G\mu_0 R}{\sqrt{(R+r) + x_3^2}} K \left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R+r) + x_3^2}} \right), \quad (3)$$

находим приливный потенциал в центральной области

$$\varphi(x, y, z) \approx \frac{Gm}{4R^3} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (4)$$

где постоянные отброшены. Как и следовало из симметрии исходного круглого кольца, приливный потенциал (4) тоже имеет азимутальную симметрию.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПРИЛИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ

Рассмотрим теперь более сложную задачу (Кондратьев и Трубитцына 2012; Кондратьев 2015) о приливном влиянии на центральную планету M возмущающего тела m , которое движется по эллиптической орбите (Рис. 1). Пусть вокруг центрального протяженного массивного сферического тела по эллиптической орбите обращается спутник малой массы m . Смещением центра тяжести центрального тела пренебрегаем. *Неинерциальную* декартову систему координат строим следующим образом: начало координат поместим в центре масс главного тела, ось абсцисс проведена в точку перицентра кеплерова эллипса, ось ординат перпендикулярна ей и лежит в плоскости орбиты спутника, третья ось смотрит перпендикулярно плоскости орбиты.

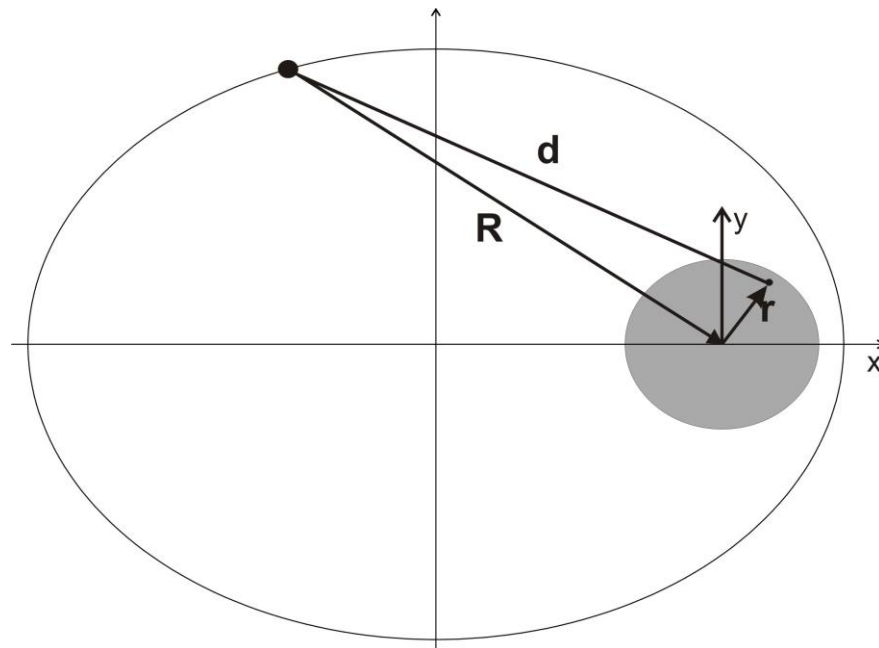


Рис. 1. Схема расчета приливного потенциала при движении спутника по эллипсу вокруг центральной массы. Здесь \mathbf{R} – вектор расстояния между центрами тел, \mathbf{r} – радиус-вектор пробной внутренней точки, \mathbf{d} – вектор расстояния пробной точки от центра спутника

Пусть в принятой системе координат $\mathbf{R}(x', y', z')$ – координаты спутника, $\mathbf{r}(x, y, z)$ – координаты пробной точки внутри центрального тела. Чтобы считать начало координат неподвижным, центру этого центрального тела следует сообщить дополнительное ускорение от массы m . По величине это ускорение, согласно закону всемирного

тяготения, будет равно $a_0 = \frac{Gm}{R^2} = \frac{Gm}{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2}$. Поэтому в принятой системе координат вектор ускорения центрального тела будет иметь компоненты

$$\mathbf{a}_0 \left(\frac{mG}{R^3} x_1', \frac{mG}{R^3} x_2', \frac{mG}{R^3} x_3' \right). \quad (5)$$

Приливная сила воздействия спутника на пробную точку внутри центрального тела образуется вычитанием из силы

$$\mathbf{a} \left(\frac{Gm}{d^3} (x' - x_1), \frac{Gm}{d^3} (x' - x_2), \frac{Gm}{d^3} (x' - x_3), \right) \quad (6)$$

найденной выше силы (5):

$$\mathbf{F}_{\text{прил}} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_0. \quad (7)$$

Отсюда следует, что полный потенциал приливной силы с точностью до некоторой постоянной будет иметь вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Gm}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{Gm(xx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Последний член в (8) есть линейная функция по координатам пробной точки; *он необходим, поскольку приливной потенциал Φ записан в неинерциальной системе отсчета.*

Далее необходимо разложить потенциал $\Phi(\mathbf{r})$ в кратный ряд Тейлора по степеням координат пробной точки и сохранить только члены, квадратичные по координатам. Для сокращения выкладок заметим, что в силу указанного выбора системы координат движение возмущающего спутника происходит в главной плоскости, то целесообразно сразу потребовать в исходном потенциале $z' = 0$. Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z'^2}} = \frac{1}{R} + \frac{xx' + yy'}{R^3} + \frac{3x'^2 - R^2}{2R^5} x^2 + \frac{3y'^2 - R^2}{2R^5} y^2 - \frac{z'^2}{2R^3}. \quad (9)$$

Если отбросить в (6) постоянную $\frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$ и учесть, что члены $\frac{xx' + yy'}{R^3}$ также сократятся

(см. формулу (8)), выражение приливого потенциала будет равно

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Gm}{2} \left[x^2 \frac{3x'^2 - R^2}{R^5} + y^2 \frac{3y'^2 - R^2}{R^5} - \frac{z^2}{R^3} + 6xy \frac{x'y'}{R^5} \right]. \quad (10)$$

Выражение (10) можно записать в эквивалентной форме

$$\Phi(x, y, z, x', y') = \alpha(x', y')(x^2 + y^2 - 2z^2) + \beta(x', y')(x^2 - y^2) + \gamma(x', y')xy, \quad (11)$$

где коэффициенты α, β, γ также зависят от координат возмущающего тела и равны

$$\begin{aligned} \alpha(x', y') &= \frac{Gm}{4R^3}, \\ \beta(x', y') &= \frac{3Gm}{4R^5}(x'^2 - y'^2), \\ \gamma(x', y') &= \frac{3Gm}{R^5}x'y', \\ R &= \sqrt{x'^2 + y'^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Потенциал (11) зависит от времени (поскольку $x'_1(t), x'_2(t)$), поэтому для применения в теории возмущений (нахождение вековых возмущений) потенциал (11) необходимо усреднить по орбите тела. При этом усреднении по периоду движения возмущающего тела $T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}}$ нами было установлено, что коэффициенты β и γ обращаются в нуль

$$\begin{aligned} \langle \beta(x', y') \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \beta(x', y') dt = 0, \\ \langle \gamma(x', y') \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим: если для коэффициента $\gamma(x'_1, x'_2)$ результат усреднения (в силу симметрии эллипса) очевиден, то для доказательства $\langle \beta(x'_1, x'_2) \rangle = 0$ были выполнены более сложные расчеты.

В итоге усреднения по времени, приливный потенциал (11) приводится к виду

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{Gm}{4a_2^3}(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (14)$$

где используется равенство

$$\langle \alpha(x'_1, x'_2) \rangle = \frac{Gm}{8\pi a^3} \int_0^{2\pi} \frac{dE}{(1 - e \cos E)^2} = \frac{Gm}{4a_1^3(1-e)^{3/2}} = \frac{Gm}{4a_2^3}. \quad (15)$$

Здесь $a_1 \geq a_2$ – полуоси эллипса.

Необходимо подчеркнуть, что усредненный *по эллипсу* приливный потенциал (14) с точностью до коэффициента совпадает с приливным потенциалом (4) от массы, движущейся *по кругу*. Необычность ситуации в том, что в первом случае круговая симметрия

поначалу, до усреднения, вообще отсутствовала: спутник двигался по эллипсу, а центральная масса расположена не в центре эллипса, а в одном из его фокусов. При усреднении появляется симметрия круга, что в физическом отношении это эквивалентно исчезновению тангенциальной компоненты приливной силы. Этот важный результат исчезновения тангенциальной составляющей приливной силы имеет место для кеплеровской орбиты *с любым эксцентриситетом*. В вековом отношении приливная сила оказывается чисто радиальной во всех плоскостях, параллельных орбите спутника, как если орбита спутника была бы просто круговая.

Чтобы лучше понять новый результат обратимся к задаче с другой стороны. Мы имеем в виду следующее: если при усреднении по эллиптической орбите приливный потенциал (14) оказывается чисто радиальным, то возникает **интересная гипотеза: не означает ли это, что и приливной потенциал эллиптического кольца Гаусса (который ранее не изучался) для эллиптической орбиты будет иметь в точках гравитирующей центральной массы тот же вид**

$$\varphi_{tidal} = \alpha(x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (16)$$

где ось Ox_3 перпендикулярна плоскости кольца и выходит из точки активного фокуса. Для прояснения ситуации обратимся к потенциалу кольца Гаусса.

2. ПОТЕНЦИАЛ КОЛЬЦА ГАУССА

При вычислении вековых возмущений от материальной точки массой m , движущейся, в соответствии с законами Кеплера, по эллиптической орбите

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad p = a_1(1 - e^2) \quad (17)$$

(ν – угол истинной аномалии), одним из основных методов является метод колец Гаусса. Суть метода заключается в «размазывании» массы спутника m по эллипсу орбиты с одномерной плотностью $\mu(\nu)$ тем большей, чем дальше в своем движении находится на соответствующей дуге ds тело. В итоге, орбита возмущающего спутника превращается в стационарное неоднородное эллиптическое кольцо (кольцо Гаусса) с максимальной плотностью в апоцентре и минимальной в перигентре. После указанного «размазывания» массы спутника (усреднения по орбите), вычисление вековых возмущений первого порядка сводится к нахождению гравитационного влияния данного кольца на другие тела. Закон распределения плотности в кольце Гаусса (Рис. 2) является сложной трансцендентной функцией от координат точки (Кондратьев 2012)

$$\mu(\nu) = \frac{m\sqrt{1-e^2}}{2\pi a_1} \frac{1}{\sqrt{1+e^2+2e\cos\nu}}. \quad (18)$$

Сложная задача о потенциале кольца Гаусса, которая не поддавалась даже самому Гауссу, была решена в аналитическом виде лишь недавно (Антонов и др. 2009), и независимо, причем принципиально новым методом, в статье (Кондратьев 2012).

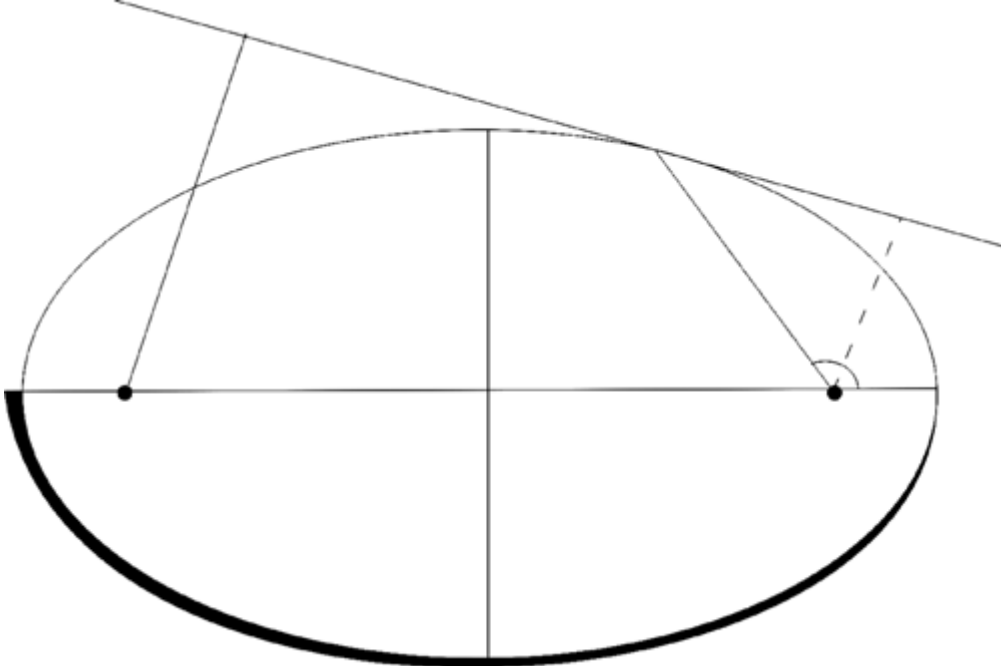


Рис. 2. Схема кольца Гаусса. Толщина кривой примерно соответствует одномерной плотности на кольце. Показаны активный (справа) и пассивный (слева) фокусы эллипса

В статье (Кондратьев 2012) было проведено детальное изучение гравитационного потенциала кольца Гаусса. Мы рассмотрим здесь тот частный случай, когда потенциал находится в точках оси ординат Ox_3 (которая выходит из точки активного фокуса). Этот потенциал равен

$$\varphi(0,0,x_3) = \frac{2Gm}{\pi\sqrt{\lambda-\nu}} \left\{ K(k) + \frac{e^2 a_1^2}{a_1^2 + \nu} [\Pi(n,k) - K(k)] \right\},$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \nu \end{pmatrix} = \frac{x_3^2 - a_2^2 \pm \sqrt{(x_3^2 - a_2^2)^2 + 4a_1^2 x_3^2}}{2}, \quad (19)$$

$$n = \frac{a_1^2 + \nu}{\lambda - \nu}; \quad k = \sqrt{\frac{a_2^2 + \nu}{\lambda - \nu}}.$$

Здесь λ и ν - эллипсоидальные координаты пробной точки, а $K(k)$ и $\Pi(n,k)$ стандартные полные эллиптические интегралы первого и третьего рода.

3. СКРЫТАЯ СИММЕТРИЯ КОЛЬЦА ГАУССА

Чтобы проверить гипотезу, следует найти приливный потенциал кольца Гаусса в окрестности главного фокуса, где расположена центральная масса. Но прямое решение

этой задачи получить не удастся из-за математических трудностей. Дело в том, что весьма трудоемким является процесс разложения общего потенциала кольца Гаусса в кратный ряд Тейлора по малым значениям x_i (даже с учетом того, что удерживать надо только квадратичные по координатам члены).

В этой ситуации некоторое упрощение сулит приведение задачи к нахождению приливного потенциала только в точках оси ординат Ox_3 , которая выходит из точки активного фокуса. Напомним, что внешний потенциал гравитирующих тел является гармонической функцией координат, поэтому сведение трехмерной задачи к одномерной в данном случае законно.

Итак, требуется разложить потенциал (19) в ряд Тейлора с удержанием членов x_3^2 . Подчеркнем, что даже в такой постановке задача весьма остается сложной (мат. программа Maple помощи здесь не оказывает). Поэтому задача о разложении потенциала решалась вручную.

Фактически, нам требуется найти постоянную α в формуле (16). Так как

$$\alpha = -\frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \varphi}{dx_3^2} \right|_{x_3=0}, \quad (20)$$

то надо найти вторую производную от функции (19). При этом необходимо находить первые и вторые производные не только от эллиптических интегралов (что уже громоздко), но ещё и от эллипсоидальных координат. Кроме того, в расчетах производные от тех и других выражений перемножаются, и это усложняет задачу и делает её чрезвычайно трудоемкой. Мы не можем здесь привести этих выкладок. **Но главный итог: после весьма трудоемких вычислений, был получен изумительно простой результат:**

$$\alpha = \frac{Gm}{4a_2^3}. \quad (21)$$

Таким образом, приливной потенциал кольца Гаусса описывается простой формулой

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{Gm}{4a_2^3} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2), \quad (22)$$

которая в точности равна выражению (14).

Поэтому приливная сила от возмущающего тела во всех плоскостях, параллельных орбите спутника оказывается чисто радиальная, как если бы орбита спутника была просто круговой. Другими словами, при усреднении тангенциальная составляющая приливной силы исчезает.

Это основной результат работы.

ОБСУЖДЕНИЕ

Мы установили, что при осреднении по времени приливного потенциала сила во всех сечениях главного тела, параллельных плоскости орбиты оказывается чисто радиальной. Результат осреднения для тангенциальной компоненты силы вообще не зависит от эксцентриситета эллиптической орбиты, как если бы эта орбита была просто круговая. Другими словами, тангенциальная составляющая приливной силы (в цилиндрической системе координат) в среднем вообще отсутствует. Кроме возможных применений данного результата для оценки вековой эволюции планет и орбит спутников представляется также, что этот вывод имеет отношение и к статье [2], где авторы, похоже, полагают, что причиной чандлеровского периода для Земли является приливное воздействие от Луны. Конкретно, в работе [2] предполагается существование в орбитальном движении Луны гармоники с периодом 6 лет. Известно, что с таким периодом происходит при учете возмущения от Солнца совпадение у Луны перигея с восходящим узлом её орбиты:

$$\frac{2\pi}{18,61 \text{ лет}} + \frac{2\pi}{8,85 \text{ лет}} = \frac{2\pi}{6 \text{ лет}}$$

(25)

С другой стороны, сочетание соответствующей периоду в шесть лет частоты с частотой годичного движения Земли вокруг Солнца дает другой период

$$T_{chand} = \frac{7}{6} \cdot 365,25 \text{ д.} \approx 426 \text{ д.},$$

(26)

примерно соответствующий чандлеровскому периоду движения полюсов Земли.

Логика авторов [2] понятна, если в качестве физического обоснования их гипотезы можно было подразумевать наличие тангенциальной компоненты приливного воздействия Луны на Землю. Но, как мы только что убедились, никакого усредненного тангенциального приливного воздействия Луны на Землю не существует.

Литература

1. Вебстер А.Г. Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. Л.-М.: ГТТИ,1933, с.635.

2. Акуленко Л.Д, Кумакшев С.А., Марков Ю.Г. Модель гравитационно-приливного механизма возбуждения колебаний полюса Земли. ДАН, Т.400,№6, с.758-763, 2005.